Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN1

Matematisk analys del1
Lösningsskisser
2023-01-05

OBS: bara kortfattade lösningsskisser! Ej fullständiga lösningar!

1. Lös ekvationerna

a) $3z - i \cdot \bar{z} = 5 - 7i$

Lösningsskiss:

sätt $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$

Insättning ger (övning)

$$(3a-b) + i(3b-a) = 5-7i \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3b - a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(övning)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - 2i$$

Svar: $z = 1 - 2i$

b) $\sqrt{2x+30} + x + 3 = 0$

Lösningsskiss:

$$\sqrt{2x+30} + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+30} = -(x+3) \overset{\text{OBS!}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2x + 30 = x^2 + 6x + 9 \overset{\text{OBS!}}{\Leftrightarrow} \text{(övning)} \Leftrightarrow x = 3 \text{ eller } x = -7$$

Ty ej "$\Leftrightarrow$" hela vägen, krävs kontroll!

- för $x = 3$ ger $VL > 0$ och $HL = 0 \Rightarrow x = 3$ ej lösning
- för $x = -7$ ger $VL = \sqrt{16} - 4 = 0$ och $HL = 0 \Rightarrow x = -7$ är en lösning till ekvationen

Svar: $x = -7$

c) $ln(3-x)-ln(-x)=ln\left(2-x^2\right)+2ln2$

Lösningsskiss:

$$\ln(3-x)-\ln(-x)=\ln(2-x^2)+2\ln 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ -x>0 \\ 2-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x<0 \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{-\sqrt{2}<x<0}}$$

Vidare för $-\sqrt{2}<x<0$ ges ekvationen av (övning) $\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)=\ln(8-4x^2)$ och

$-\sqrt{2}<x<0 \Leftrightarrow$ (övning) $\Leftrightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \text{ eller } x=\frac{3}{2} \text{ eller } x=-1\right)$ och $-\sqrt{2}<x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ eller $x=-1$

Svar: $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$.

2. Funktionen f är definierad genom $f(x)=x^2-sin(3x)$.

a) Bestäm största värde som andraderivatan $f''(x)$ kan anta.

Lösningsskiss:

$f(x)=x^2-\sin(3x)$

$f'(x)=2x-3\cos(3x)$

$f''(x)=2+9\sin(3x)$

$f''(x)=2+9\sin(3x)$ där $-1\le\sin(3x)\le 1$

$-1\le\sin(3x)\le 1 \quad /\cdot 9$

$-9\le 9\sin(3x)\le 9 \quad /+2$

$-7\le 2+9\sin(3x)\le 11$

alltså $f''(x)\le 11$

Svar: Andraderivatan största värde är 11.

b) Lös ekvationen $f''(x) = \frac{13}{2}$.

Lösningsskiss:

$$f''(x) = \frac{13}{2} \Rightarrow 2 + 9\sin(3x) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow (\text{"övning"}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in \mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$ eller $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$ där $n \in Z$

3. Beräkna följande gränsvärden

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 + x} = \left[\begin{array}{l} \text{OBS! } \pi x \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ \text{standard"gränsvärdet"} \\ \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ ger} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}}{\frac{x^2 + x}{(\pi x)}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} \cdot \frac{\pi \cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}}_{\to 1} \cdot \frac{\pi}{x+1} \right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi}{0+1} = \pi$$

Svar: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 + x} = \pi$

b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - 1)(2x - 2)}{2x^2 - 4x + 2} = \left[\text{typ} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

Svar: $\lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - 1)(2x - 2)}{2x^2 - 4x + 2} = 4$

c) $\lim_{x \to -1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 + x} = \left[\text{typ} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \right] = \left[x+1 = t \to 0 \text{ då } x \to -1 \right] = \left[\text{övning} \right] =$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi t - \pi)}{(t-1)t} = \left[\begin{array}{c} \text{övning!} \\ \text{kända räknelagar} \\ + \\ \text{standardgränsvärden} \end{array} \right] = \ldots = \lim_{t \to 0} \left(- \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)} \cdot \frac{\pi}{t-1} \right) = -1 \cdot \frac{\pi}{0-1} = \pi$

Svar: $\lim_{x \to -1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 + x} = \pi$

4. Ett rätblock (tegelsten) uppfyller att längden är dubbelt så stor som bredden, och att längden plus höjden är 12 längdenheter. Vilken är den största möjliga volym?

Lösningsskiss:

Låt x vara rätblockets bredd.
Sökta volymen ges då av $V(x) = x \cdot 2x \cdot (12 - 2x) = 4x^2(6-x)$ där $0 < x < 6$.
Derivering ger $V'(x) = 12(4-x)x$, d.v.s. $V'(x) > 0$ om $0 < x < 4$, $V'(x) = 0$ om $x = 4$ och $V'(x) < 0$ om $4 < x < 6$. $V(x)$ är alltså strängt växande på $]0, 4]$ och strängt avtagande på $[4, 6[$. Detta visar att maximala volymen blir $V(4) = 128$ volymenheter.

Svar: 128 v.e.

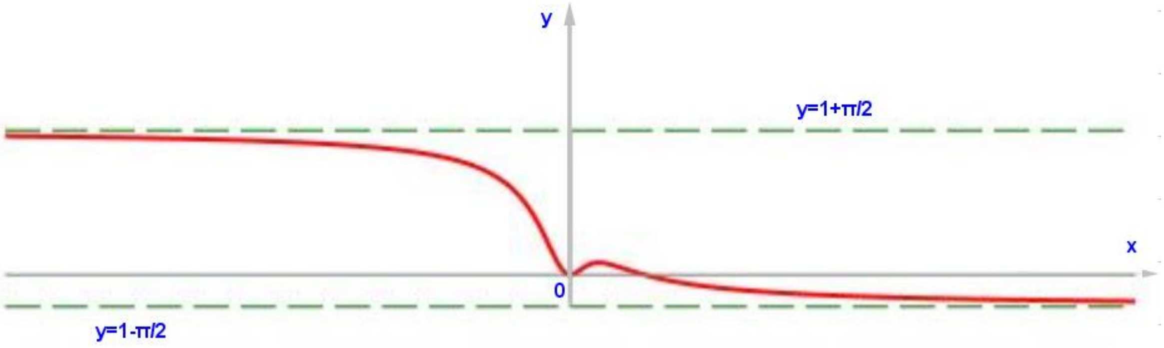
5. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{4x^2 + 1} - \arctan(2x)$. Ange antalet nollställen till f samt eventuella lodräta och horisontella (vågräta) asymptoter och lokala extrempunkter.

Lösningsskiss:

- f är definierad för $x \in \mathbb{R}$
- Standardräkningar (Genomför dessa!!) ger:
  - $f'(x) = \frac{8x(1-2x)}{(4x^2+1)^2}$
- Detta ger teckentabellen

x		0		$1/2$	
$8x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$(4x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lokal min. $f(0)$	$\nearrow$	lokal max. $f(1/2)$	$\searrow$

- Vi ser att $f(x) = \frac{4 + 2/x}{4 + 1/x^2} - \arctan(2x) \to 1 \mp \frac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$, $f(0) = 0$ och att $f(1/2) = 1 - \pi/4$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. f han en lokal minimipunkt i $x=0$ med det lokala minimivärdet $f(0)=0$ samt en lokal maximipunkt i $x=\frac{1}{2}$ med det lokala maximivärdet $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\pi}{4}$. Lodräta asymptoter saknas. Linjen $y=1+\frac{\pi}{2}$ är en horisontell asymptot då $x\to-\infty$ och linjen $y=1-\frac{\pi}{2}$ är en horisontell asymptot då $x\to\infty$. Grafen ger att f har 2 nollställen.

6. Låt $p(z)=z^4-2z^3+6z^2-8z+8$

a) Ekvationen $p(z)=0$ har en imaginär rot, $z=a\cdot i$. Bestäm a . (1p)

b) Bestäm de övriga rötterna till ekvationen $p(z)=0$. (2p)

Lösningsskiss a) :

$$p(a\cdot i)=(a\cdot i)^4-2(a\cdot i)^3+6(a\cdot i)^2-8(a\cdot i)+8=0\Rightarrow$$
$$a^4+2a^3\cdot i-6a^2-8a\cdot i+8=0\Leftrightarrow\left(a^4-6a^2+8\right)+i\cdot\left(2a^3-8a\right)=0$$ ger

$$\begin{cases}a^4-6a^2+8=0\\2a^3-8a=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a+2)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0\\a(a-2)(a+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(a=2 \text{ eller } a=-2)$$

$\Rightarrow z=2i$ respektive $z=-2i$ är imaginära rötter till $p(z)=0$.

Svar: $a=2,\quad a=-2$

Lösningsskiss b) :

$$p(z)=0\Rightarrow z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0\Leftrightarrow(z-2i)(z+2i)\cdot q(z)=0$$

där

$$q(z)=\frac{z^4-2z^3+6z^2-8z+8}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{z^4-2z^3+6z^2-8z+8}{(z^2+4)}=[\text{ polynomdivision }]= \; =z^2-2z+2$$

$$q(x)=z^2-2z+2\Rightarrow$$

$$z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0\Leftrightarrow(z-2i)(z+2i)\cdot(z^2-2z+2)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(z=2i \quad eller \quad z=-2i \quad z=1+i \quad z=1-i\right)$$

Svar: $z=2i \quad eller \quad z=-2i \quad z=1+i \quad z=1-i$

7. Låt $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$. Beräkna $f'(x)$ för alla $x\in\Re$ för vilka derivatan existerar, med hjälp av definitionen av derivata.

Lösningsskiss:

Om vi studerar först fallet $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\ln|h|+h-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h\ln|h|+1)}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(h\ln|h|+1)=1,$$ enligt standardgränsvärde.

För $x\neq 0$ fås

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2\ln|x+h|+\cancel{x}+h-x^2\ln|x|\cancel{-x}}{h}=$$

$$=[\text{övning!}]=\lim_{h\to 0}\left(x^2\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{(\frac{h}{x})}\cdot\frac{1}{x}+(2x+h)\ln|x+h|+1\right)=x+2x\ln|x|+1,$$

enligt standardgränsvärdet $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ och där vi också använt att $\ln|x|$ är kontinuerlig.

Svar: $f'(x)=\begin{cases} x+2x\ln|x|+1 & ,x\neq 0 \\ 1 & ,x=0\end{cases}$